مشق نمبر 1

ریاضی :- میٹرک (247)

سمسٹر :- بہار، 2011

سوال نمبر 1 :-

فنکشن، ان ٹو فنکشن، آن ٹو فنکشن اور ون ٹو ون فنکشن کی وضاحت مثالوں سے کریں؟

فنکشن :- دو غیر خالی سیٹوں A اور B کے درمیان کوئی ثنائی ربط f ایسا ہو کہ

(i) $Dom\ f = A$

(ii) f کے کوئی سے دو مرتب جوڑوں کے پہلے ارکان میں تکرار نہ ہو تو f کو A سے B کی جانب فنکشن کہتے ہیں اسکو ایسے لکھا جاتا ہے

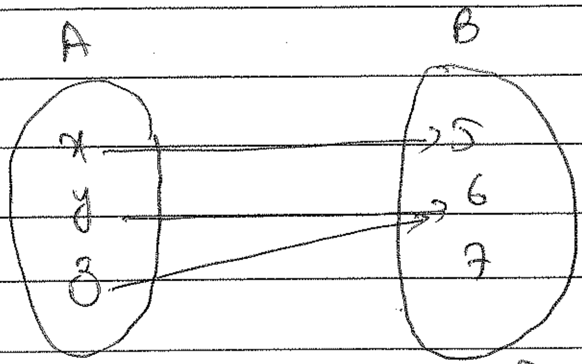
$f: A \rightarrow B$

مثلاً $A = \{x, y, z\}$ $B = \{5, 6, 7\}$

ثنائی ربط $f = \{(x,5), (y,6), (z,6)\}$، A سے B کی جانب فنکشن ہے کیونکہ:

(i) $Dom(R) = A$

(ii) سیٹ A کا ہر رکن سیٹ B کے صرف ایک رکن سے ملا ہوا ہے۔ یعنی f کے کسی بھی دو مرتب جوڑوں کے پہلے عناصر میں تکرار نہیں ہے۔

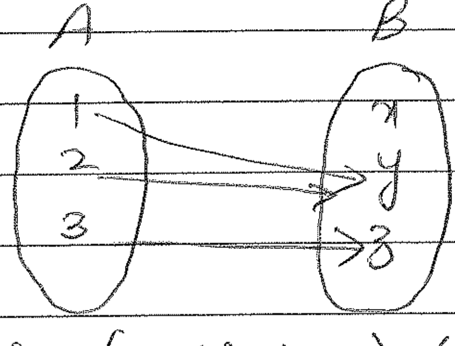


$f = \{(x,5), (y,6), (z,6)\}$

ان ٹو فنکشن :-

اگر سیٹ A سے B کی جانب f ایسا فنکشن ہو کہ Range(f) ⊂ B یعنی Range(f) ≠ B، تب f کو A سے B کی جانب ان ٹو فنکشن کہتے ہیں

مثلاً :- $A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{x, y, z\}$



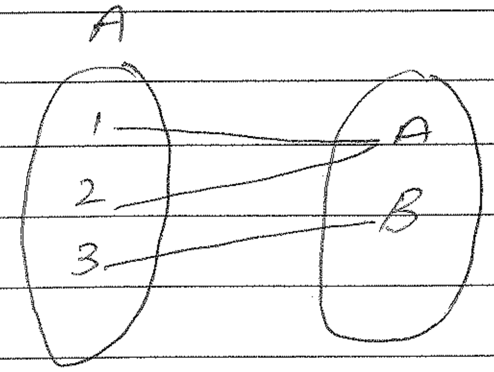
$f = \{(1,y), (2,y), (3,z)\}$

آن ٹو فنکشن :-

اگر سیٹ A سے B کی جانب f ایسا فنکشن ہو کہ Range(f) = B تب f کو A سے B کی جانب آن ٹو

فنکشن کہتے ہیں۔

مثلاً:۔

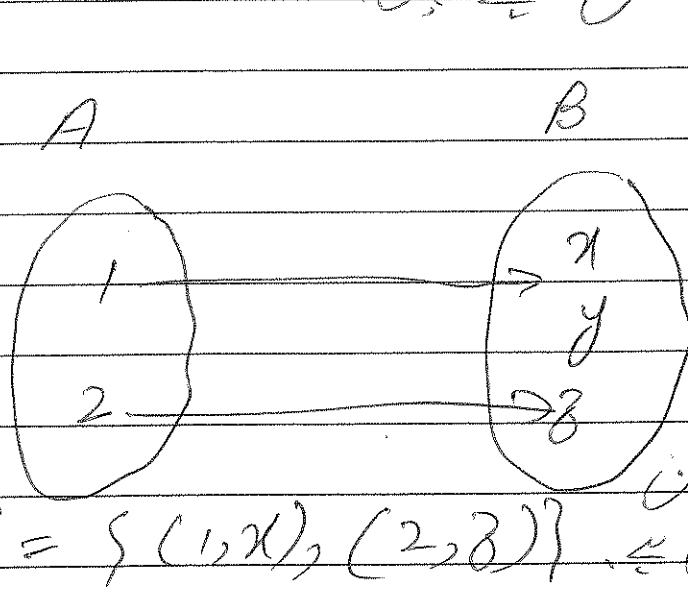


$f = \{(1,A),(2,A),(3,B)\}$

ربط f ایک آن ٹو فنکشن ہے

ون ٹو ون فنکشن:۔

اگر سیٹ A سے B کا ایک f ایسا فنکشن ہو کہ جس میں کوئی سے بھی دو مختلف جوڑوں کے دوسرے ارکان میں تکرار نہ ہو تو f کو ون ٹو ون فنکشن کہتے ہیں۔



ربط f ایک ون ٹو ون فنکشن ہے۔

$f = \{(1,x),(2,z)\}$

سوال نمبر ۱ حصہ (ب)

حقیقی اعداد کی برابری اور نابرابری کی خصوصیات کو مثالوں سے بیان کریں؟

حقیقی اعداد کیا ہے؟ :-

Q (ناطق اعداد کا سیٹ) اور 'Q (غیر ناطق اعداد کا سیٹ) کو (U) ارکان مل کر حقیقی اعداد کا سیٹ بناتے ہیں اس سیٹ کو علامتی لحاظ سے R سے ظاہر کیا جاتا ہے

$R = Q \cup Q'$ $\quad Q \cap Q' = \phi$

حقیقی اعداد کے خواص :-

حقیقی اعداد کی برابری کی خصوصیات :-
(Equality)

(i) خاصیت عکس (Reflexive Property)

$\forall x \in R, \quad x = x$

(ii) خاصیت تشاکل (Symmetric Property)

$\forall x, y \in R$
$x = y \Longleftrightarrow y = x$

(iii) خاصیت متعدیت (Transitive Property)

$\forall x, y, z \in R$

$x = y$ اور $y = z$, $x = z$

(iv) جمعی خاصیت:- (Additive Property)

$\forall x, y, z \in R$

$x = y \rightarrow x + z = y + z$

$x = y \rightarrow z + x = z + y$ اور

(v) ضربی خاصیت (Multiplicative Property)

$\forall x, y, z \in R$

$x = y \rightarrow xz = yz$

$x = y \rightarrow zx = zy$ اور

(vi) تنسیخی خاصیت بلحاظ جمع

(Cancellation property w.r.t. +)

$\forall x, y, z \in R$

$x + z = y + z \rightarrow x = y$

$z + x = z + y \rightarrow x = y$ اور

نابرابری (In equality)

حقیقی اعداد کے سیٹ R کے ارکان میں روابط $<$ اور $>$ مندرجہ ذیل خصوصیات کے حامل ہوتے ہیں۔

(i) ثلاثی خاصیت (Trichotomy property)

$\forall x, y \in R$

$x < y$ یا $x = y$ یا $x > y$

(ii) خاصیت متعدیت (Transitive Property)

$\forall x, y, z \in R$

(a) $x < y \wedge y < z \rightarrow x < z$ اور

(b) $x > y \wedge y > z \rightarrow x > z$

(iii) جمعی خاصیت (Additive property)

$\forall x, y, z \in R$

(a) $x < y \rightarrow x + z < y + z$

$x < y \rightarrow z + x < z + y$ اور

(b) $x > y \rightarrow x + z > y + z$

$x > y \rightarrow z + x > z + y$

(Multiplicative Property) ضربی خاصیت (iv)

(a) $\forall x, y, z \in R \wedge z > 0$

(i) $x > y \rightarrow xz > yz$

$x > y \rightarrow zx > zy$,,

(ii) $x < y \rightarrow xz < yz$

$x < y \rightarrow zx < zy$,,

(b) $\forall x, y, z \in R \wedge z < 0$

(i) $x > y \rightarrow xz < yz$

$x > y \rightarrow zx < zy$,,

(ii) $x < y \rightarrow xz > yz$

$x < y \rightarrow zx > zy$

ضربی معکوس کی نابرابری (v)

(Inequality & Multiplicative Inverse)

$\forall x, y \in R, x \neq 0, y \neq 0$

(a) $x < y \rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$

(b) $x > y \rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{y}$

سوال نمبر 2 (الف)

اگر $p = \frac{1}{\sqrt{10}+3}$ ہو تو $\left(p+\frac{1}{p}\right)^2$ اور $\left(p-\frac{1}{p}\right)^2$ کی قیمتیں معلوم کریں؟

$p = \frac{1}{\sqrt{10}+3} = \frac{1}{p} = \sqrt{10}+3$

$p = \frac{1}{\sqrt{10}+3} = p = \frac{1}{\sqrt{10}+3} \times \frac{\sqrt{10}-3}{\sqrt{10}-3}$

$p = \frac{\sqrt{10}-3}{(\sqrt{10})^2-(3)^2} = \frac{\sqrt{10}-3}{10-9}$

$p = \sqrt{10}-3$

$\left(p+\frac{1}{p}\right)^2 = \left(\sqrt{10}-3+\sqrt{10}+3\right)^2$

$= \left(2\sqrt{10}\right)^2 = 4 \times 10 = 40$

$\left(p-\frac{1}{p}\right)^2 = \left(\sqrt{10}-3-(\sqrt{10}-3)\right)^2$

$= \left(\sqrt{10}-3-\sqrt{10}-3\right)^2$

$= (-6)^2 = 36$

$\{40, 36\}$ Ans

سوال نمبر 2 حصہ (ب)

قوت نما کے قوانین کو مثالوں سے بیان کریں نیز نا قوت نما کو بھی درست مثال سے بیان کریں؟

قوت نما کیا ہے؟

5^4 کو $5\times5\times5\times5$ لکھ سکتے ہیں

5^4 کا یہ مطلب ہے 5^4 کو میں 5 اساس (Base)

اور 4 قوت نما (Exponent) کہتے ہیں کسی عدد کا قوت نما

یہ بتاتا ہے کہ اس عدد میں اساس کو کتنی بار ضرب دیا

گیا ہے۔

قوت نما کے قوانین (Laws of Exponents)

(i) قوتوں کی جمع کا قانون (Law of Sum of Powers)

ایک ہی اساس کے دو اعداد کو ضرب دیں تو حاصل ضرب میں اساس وہی رہتا ہے جبکہ قوت نما اعداد کے قوت نماؤں کا مجموعہ ہوتا ہے۔

مثال کے طور پر:

$2^3\times2^1=(2\times2\times2)(2)=2\times2\times2\times2=2^4=2^{3+1}$

(ii) حاصل ضرب کی قوت کا قانون

(Law of Power of Product)

اعداد کے حاصل ضرب کی قوت کا اعداد کی اسی قوت کے حاصل ضرب کے برابر ہوتی ہے۔

مثال:

$$(pq)^3 = (pq)\times(pq)\times(pq)$$

$$= (p\times p\times p)\times(q\times q\times q) = p^3q^3$$

(iii) قوت کی قوت کا قانون (Law of Power of Power)

اگر قوت کی قوت لیں تو اساس وہی رہتا ہے جبکہ قوت نما دونوں قوت نماؤں کے حاصل ضرب کے برابر ہوتا ہے۔

یعنی:

$$(b^x)^5 = b^x\times b^x\times b^x\times b^x\times b^x$$

$$= b^{5x} = b^{5\times x}$$

(iv) ایک جیسے اساس میں قوتوں کے حاصل تقسیم کا قانون (Law of Quotient of Power with Common Base)

قوتوں کے حاصل تقسیم میں جبکہ اساس ایک ہی عدد ہو تو شمار کنندہ کے قوت نما میں مخرج کے قوت نما کو تفریق کیا جاتا ہے اور اساس وہی رہتا ہے۔

مثلاً:

$$\frac{m^4}{m^3} = \frac{m.m.m.m}{m.m.m} = m^{4-3} = m^1$$

سوال نمبر 3 جز (الف)

لوگرتھم کی تعریف کریں؟ اور عام لوگرتھم، خاصیہ اور مینٹیسا اور قوت نما کے مقام کی وضاحت کریں؟

لوگرتھم: اگر $a^y = x$ جبکہ $a, x, y \in R$ اور $a, x > 0$ اور $a \neq 1$ ہو تو y کو a کی اساس پر x کا لوگرتھم کہتے ہیں اسے یوں لکھتے ہیں۔

$$a^y = x \Rightarrow y = \log_a^x$$

مثال: (1) $4^3 = 64$ $\log_4^{64} = 3$

عام لوگرتھم: (Common Logarithms)

ماہر ریاضی دان جان نیپیئر نے اساس e والے لوگرتھم ایجاد کیے۔ e کی قیمت پانچ درجہ اعشاریہ تک 2.71828 ہے۔ اساس e والے لوگرتھم قدرتی یا نیپیئرین لوگرتھم کہلاتے ہیں۔ جبکہ اساس 10 والے لوگرتھم کو عام لوگرتھم کہتے ہیں۔ اگرچہ دونوں قسم کے لوگرتھم استعمال میں آتے ہیں۔

خاصیہ اور مینٹیسا: (Characteristics & Mantissa)

خاصیہ: کسی عدد کے لوگرتھم کے صحیح عددی حصے کو لوگرتھم کا خاصیہ کہتے ہیں جو مثبت ہو سکتا ہے اور منفی بھی۔

مثلاً:- 4.5130

اس میں خاصہ 4 ہے۔

منٹیسا:- کسی عدد کے لوگرتھم کے اعشاری حصہ کو منٹیسا کہتے ہیں جو مثبت ہوتا ہے۔

مثلاً:-

$\log x = 2.3780$ میں

خاصہ 2 اور منٹیسا .3780 مثبت ہے

حوالہ کا مقام:- (Reference Position)

کسی دیئے گئے عدد میں بائیں طرف پہلے غیر صفری ہندسے اور اس سے اگلے ہندسے کی درمیانی جگہ کو حوالہ کا مقام کہتے ہیں۔

حوالہ کے مقام کیلئے علامت ^ استعمال کی جاتی ہے۔

مثلاً 323.5 میں بائیں طرف پہلا غیر صفری ہندسہ 3 ہے اس لئے 3 اور اس سے اگلے ہندسے 2 کے درمیان حوالہ کا مقام ہے

اسے 3^23.5 سے ظاہر کیا جائے گا۔

اگر نقطہ اعشاریہ حوالہ کے دائیں جانب ہو تو خاصہ مثبت ہو گا اور بائیں جانب ہو تو خاصہ منفی ہو گا۔

مثلاً 3^23.5 کا خاصہ 2 ہے اور 4^.678 کا خاصہ صفر ہے جبکہ 0.07^12 کا خاصہ 2- ہے

سوال نمبر 3 جز (ب)

لوگرتھم کے 4 قوانین کو ثابت کریں اور ہر
ایک کی ایک مثال بھی دیں؟

لوگرتھم کے قوانین (Laws of Logarithms)

قانون نمبر 1:-

$$\log_a mn = \log_a m + \log_a n$$

(i) $\log_a m = x$ (ii) $\log_a n = y$

$m = a^x$ $n = a^y$

$$m \cdot n = a^x \cdot a^y$$
$$= a^{x+y}$$
$$\log_a mn = x + y$$
$$= \log_a m + \log_a n$$

قانون نمبر 2:-

$$\log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n$$

$\log_a m = x$ (i) $\log_a n = y$ (ii)

$m = a^x$ $n = a^y$

$$\frac{m}{n} = \frac{a^x}{a^y}$$

$$\frac{m}{n} = a^{x-y}$$

$$\log_a \frac{m}{n} = x - y$$

$$\log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n$$

قانون نمبر 3 :

$$\log_a (m)^n = n \cdot \log_a m$$

$$\log_a m = x$$

$$a^x = m$$

$$(a^x)^n = m^n$$

$$a^{nx} = m^n$$

$$\log_a m^n = nx$$

$$\log_a m^n = n \log_a m$$

x کی قیمت درج کرنے سے

قانون نمبر 4 :

$$\log_b m = \frac{\log_a m}{\log_a b}$$

$$\log_b m = x$$

$$b^x = m$$

$$\log_a b^x = \log_a m$$

$$x \cdot \log_a b = \log_a m$$

$$x = \frac{\log_a m}{\log_a b}$$

$$\log_b m = \frac{\log_a m}{\log_a b}$$

مثالیں:-

نمبر ۱: $\log 55.5 \times 81 = \log 55.5 + \log 81$

نمبر ۲: $\log \frac{213.1}{34.22} = \log 213.1 - \log 34.22$

نمبر ۳: $\log_b a \times \log_c b \times \frac{1}{\log_c a} = 1$

$L.H.S = \log_b a \times \log_c b \times \frac{1}{\log_c a}$

قانون 4 کی مدد سے $\log_b a$ کی قیمت رکھنے سے

$\frac{\log_c a}{\log_c b} \times \log_c b \times \frac{1}{\log_c a}$

$= 1$

$L.H.S = R.H.S$

سوال نمبر 4 جز (الف)

کثیر رقمی جملوں کی اقسام کو وضاحت سے بیان کریں؟

کثیر رقمی جملوں کی اقسام

(Kinds of Polynomial Expressions)

کثیر رقمی جملوں کی مختلف طریقوں سے درجہ بندی

کی جا سکتی ہے۔ ذیل میں چار اہم طریقوں کا ذکر کیا گیا ہے۔

1۔ کثیر رقمی جملوں کی اقسام بلحاظ رقوم
(Kinds of Polynomials w.r.t Terms)

اگر کسی کثیر رقمی میں صرف ایک رقم ہو تو اسے یک رقمی جملہ کہتے ہیں اور دو اور تین رقوم پر مشتمل کثیر رقمیوں کو بالترتیب دو رقمی اور سہ رقمی جملے کہتے ہیں۔

مثلاً:

$8y, 6y$ یک رقمی، $5x+3$ دو رقمی

$x+y-3, x+3y+2$ سہ رقمی کثیر رقمیاں ہیں۔

2۔ کثیر رقمی جملوں کی اقسام بلحاظ متغیرات
(Kinds of Polynomials w.r.t Variables)

$5x+3, 3y^2-2y+1$ ایک ایک متغیر میں کثیر رقمیاں ہیں۔ جبکہ x^2+y^2+3 دو متغیرات x اور y میں کثیر رقمی ہیں۔ دو متغیرات والی کثیر رقمی کو عام طور پر $p(x,y)$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

$3x+4y+6z$ تین متغیرات پر مشتمل کثیر رقمی ہے۔ تین متغیرات پر مشتمل کثیر رقمی کو عام طور پر $p(x,y,z)$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

3۔ کثیر رقمی جملوں کی اقسام بلحاظ درجہ
(Kinds of Polynomials w.r.t. Degree)

کسی یک رقمی جملے کا درجہ اس میں موجود متغیرات کے قوت نماؤں کا مجموعہ ہوتا ہے۔

مثلاً: $5x^3y z^5$ ایک یک رقمی جملہ ہے اور اس میں موجود متغیرات کے قوت نماؤں کا مجموعہ $3+1+5=9$ ہے۔ اس لیے اس جملے کا درجہ 9 ہے۔

کثیر رقمی جملے کے درجہ سے مراد اس میں موجود تمام رقموں کے قوت نماؤں میں سب سے بڑا قوت نما ہوتا ہے۔

4۔ کثیر رقمی جملوں کی اقسام بلحاظ عددی سر
(Kinds of Polynomials w.r.t. Coefficients)

اگر کثیر رقمی کی رقموں کے عددی سر قدرتی اعداد ہوں تو وہ قدرتی اعداد میں کثیر رقمی کہلائے گی۔

مثلاً:

$4x^2+5x+8$

سوال نمبر 6 جز (ب)

مسئلہ باقی کو ثابت کریں اور ایک مثال بھی دیں۔

مسئلہ باقی: $D(x)$ اور $P(x)$ دو کثیر رقمیاں ہیں جن کے درجے بالترتیب n اور m ہیں اور $m \le n$ ہے۔ اگر $P(x)$ کو $D(x)$ پر تقسیم کرنے سے $Q(x)$ بطور

حاصل قسمت اور R بطور باقی حاصل ہو تو اسے علامتی طور پر یوں ظاہر کیا جائے گا۔

$$P(x) = D(x)\,Q(x) + R$$

اگر $D(x) = x-a$ ہو تو مساوات (1) کو یوں لکھا جا سکتا ہے

$$P(x) = (x-a)\,Q(x) + R$$

چونکہ مساوات (2) x کی ہر قیمت کے لئے درست ہے لہٰذا $x=a$ کے لئے بھی درست ہوگی لہٰذا مساوات (2) میں $x=a$ رکھنے سے

$$P(a) = (0)\,Q(x) + R = R$$

اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر $P(x)$ کو $x-a$ سے تقسیم کیا جائے تو $P(a)$ بطور باقی حاصل ہوتا ہے اس نتیجہ کو مسئلہ باقی کہتے ہیں۔

مسئلہ باقی کی مثال :-

اگر $P(x) = x^3 - x^2 - 14x + 24$ اور $D(x) = x+2$ ہو تو باقی معلوم کریں؟

$P(x) = x^3 - x^2 - 14x + 24, \quad D(x) = x+2$

$P(-2) = (-2)^3 - (-2)^2 - 14(-2) + 24$

$= -8 - 4 + 28 + 24$

$= -12 + 52$

$= 40$

پس باقی $R = 40$

سوال نمبر 5۔ جز (الف)

اگر A اور B دو الجبری جملے ہوں اور ان کا عاد اعظم H اور ذو اضعاف اقل L ہو تو ثابت کریں کہ $A \times B = L \times H$ نیز اپنا مثال سے اس کی وضاحت کریں؟

$$A \times B = L \times H$$

اور $\frac{A}{H} = x$ اور $\frac{B}{H} = y$

$$A = Hx \quad (i)$$
$$B = Hy \quad (ii)$$

چونکہ x اور y میں کوئی جزو ضربی مشترک نہیں لہذا

$$L = H \cdot x \cdot y$$

طرفین کو H سے ضرب دینے سے

$$HL = H(H \cdot x \cdot y)$$
$$= (Hx) \cdot (Hy)$$

مساوات نمبر (i) اور (ii) سے

$$= A \cdot B$$

مثال:۔ دو جملوں کا ذو اضعاف اقل $(2x+1)(x^2-1)$ اور عاد اعظم $2x+1$ ہے۔ اگر ایک جملہ $(x-1)(2x+1)$ ہو تو دوسرا جملہ معلوم کریں؟

ذو اضعاف اقل $= L = (2x+1)(x^2-1)$

عاد اعظم $= H = 2x+1$

$A = (x-1)(2x+1)$

$B = ?$

ہم جانتے ہیں

$$A \times B = L \times H$$

$$B = \frac{L \times H}{A}$$

قیمتیں درج کرنے سے

$$= \frac{(2x+1)(x^2-1)(2x+1)}{(x-1)(2x+1)}$$

$$= \frac{(2x+1)(x-1)(x+1)(2x+1)}{(x-1)(2x+1)}$$

$$= (x+1)(2x+1)$$

سوال نمبر 5 جز (ب)

ثابت کریں کہ $H^3+L^3=A^3+B^3$ جبکہ H، $H+L=A+B$ عاد اعظم نے ذو اضعاف اقل A اور B مشترک رشتوں کی ظاہر کرتے ہیں۔ ایک مثال سے پھر ثابت بھی کریں؟

$H+L = A+B$

دونوں طرف سے مکعب لینے سے

$(H+L)^3 = (A+B)^3$

$H^3+L^3+3HL(H+L) = A^3+B^3+3AB(A+B)$

لیکن $H+L = A+B$

اور $H\times L = A\times B$

پس

$H^3+L^3+3AB(A+B) = A^3+B^3+3AB(A+B)$

چونکہ

$3AB(A+B)$ دونوں اطراف میں مشترک ہیں

$H^3+L^3 = A^3+B^3$ Ans

مثال:۔ اگر دو جملوں کا حاصل ضرب $x^4+3x^3-12x^2-20x+48$ اور ذو اضعاف اقل $x^3-5x^2-2x-24$ ہے تو ان کا عاد اعظم معلوم کریں؟

$A\times B = x^4+3x^3-12x^2-20x+48$

$L = x^3 + 5x^2 - 2x - 24$

$H = ?$

ہم جانتے ہیں

$L \times H = A \times B$

$H = \dfrac{A \times B}{L}$

قیمتیں درج کرنے سے

$H = \dfrac{x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 20x + 48}{x^3 + 5x^2 - 2x - 24}$

$$
\begin{array}{r|l}
x^3 + 5x^2 - 2x - 24 & x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 20x + 48 \\
 & \underline{\pm x^4 \pm 5x^3 \mp 2x^2 \mp 24x} \\
 & -2x^3 - 10x^2 + 4x + 48 \\
 & \underline{\mp 2x^3 \mp 10x^2 \pm 4x \pm 48} \\
 & 0
\end{array}
$$

پس

[illegible] $- H = x - 2$